Chapitre 5

L'ORDINATEUR EST UN GRAPHE BOOLIEN.

Après cette contemplation de l'appareil au repos,
il est temps de mettre l'ordinateur sous tension.

L'ordinateur est un graphe <u>informatif</u>

Les graphes informatifs <u>non branchés</u>
sont les graphes <u>non coloriés</u>
(à flèches sensorielles et commandes éventuelles) .

En se <u>branchant</u> un graphe informatif se dote d'une <u>pensée</u>,
ou <u>coloriage</u> en évolution avec le temps.

En graphe informatif <u>branché</u>
à tout instant
toute flèche se trouve tout entière
en l'une des <u>couleurs</u> d'une <u>palette</u> préassignée

bientôt réduite aux deux <u>valeurs</u> ou <u>couleurs</u> de vérité

<u>bleu</u> = o = <u>faux</u>   <u>rouge</u> = I = <u>vrai</u>

Tout graphe informatif branché

se <u>débranche</u>

en son graphe sous-jacent non colorié.

La palette de l'ordinateur électronique est bicolore.

et ses couleurs <u>bleu</u> = o <u>rouge</u> = I

indiquent des potentiels électriques.

Gracieuses et aimables personnes,

les flèches d'ordinateur acceptent volontiers de se présenter

tout de bleu vêtues ou tout habillées de rouge,

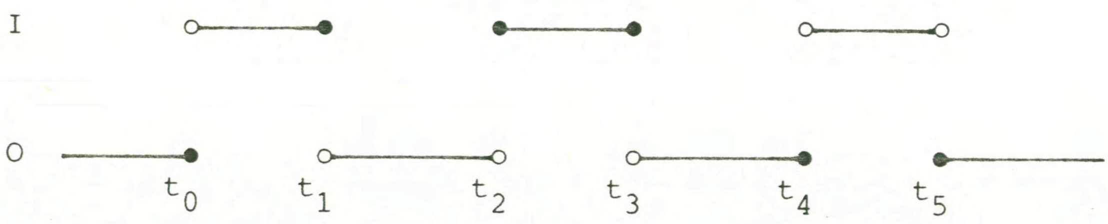
voire toutes nues, en graphe débranché,

mais refusent de paraître en toute situation intermédiaire.

En graphe informatif à palette bicolore o , I

la couleur d'une flèche est en principe

une fonction en escalier en la variable <u>temps</u>.



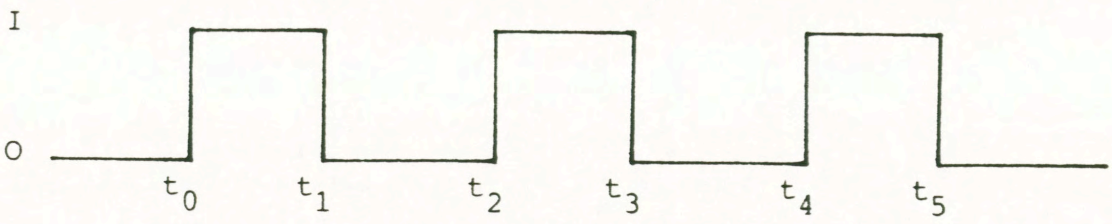
précisant que la flèche est bleue (ou nulle) en t_0 t_4 t_5

et rouge (ou <u>une</u>) en t_1 t_2 t_3 .

Comme cette information fine est le plus souvent sans intérêt,

on se contente en général

du graphique traditionnel ambigu de la page suivante



Par <u>sommet branché</u> on entend évidemment:
sommet de graphe informatif branché,
c'est-à-dire, en dernière analyse,
tout sommet dont les flèches d'entrée et de sortie sont coloriées
au moyen des couleurs d'une palette préassignée,
ce coloriage pouvant varier avec le temps.

En sommet à $\underline{m}$ flèches d'entrée et $\underline{n}$ flèches de sortie
d'un graphe informatif à palette de cardinalité $\underline{c}$,
il y a donc exactement c^m coloriages globaux d'entrée possibles
et c^n coloriages globaux de sortie possibles.
Ces coloriages possibles non nécessairement réalisés
seront encore commodément nommés <u>virtuels</u>.

Flèches d'entrée et de sortie d'un sommet de graphe
parfaitement individualisées
seront toujours supposées numérotées
de préférence de droite à gauche
en hommage aux Arabes qui nous transmirent
la numération de position.
La palette jouant à l'alphabet,
les coloriages virtuels d'entrée et de sortie
s'identifient dès lors aux mots à $\underline{m}$ et $\underline{n}$ lettres.

Tout sommet de graphe fonctionnel (branché !)

est doté à tout instant <u>t</u>

d'un <u>coloriage instantané d'entrée</u>, ou mot d'entrée $x(t)$

et d'un <u>coloriage instantané de sortie</u>, ou mot de sortie $y(t)$

tous deux <u>effectifs</u> à l'instant <u>t</u>.

*

* *

Le déroulement de la <u>pensée</u> de l'ordinateur,

déjà <u>fonction</u> à double titre,

va se préciser

en utilisant cette fois le concept de fonction

comme une version mathématique d'une idée de la causalité:

: L'ordinateur est un <u>graphe fonctionnel</u>: :

Les graphes <u>fonctionnels</u> sont des graphes informatifs

dont la pensée évolue <u>fonctionnellement</u>

comme résultante globale

des fonctionnements fonctionnels individuels de ses sommets :

A cet effet

tout sommet de graphe fonctionnel est habité par une fonction,

définie en ses coloriages d'entrée virtuels

et à valeurs parmi ses coloriages de sortie virtuels.

Par la fonction F qui l'habite,
tout sommet (de graphe) fonctionnel
déjà doté de ses entrée et sortie instantanées $x(t)$ et $y(t)$
se trouve nanti de plus
du coloriage de sortie, a priori virtuel, $F(x(t))$,
nommé coloriage instanciel (de sortie) à l'instant t.

Le fonctionnement fonctionnel des sommets fonctionnels
est règlé par

L'axiome d'évolution des sommets fonctionnels

> En tout sommet fonctionnel branché
> le coloriage instantané de sortie finit par s'aligner sur
> le coloriage instanciel (de sortie)
> pour autant que ce dernier reste constant assez longtemps
> et cette égalité se maintient au moins
> tant que le coloriage instanciel garde sa valeur constante :
>
> Chaque fois que les coloriages de sortie
> instantané et instanciel ne sont pas égaux
> un délai est imparti au coloriage instantané de sortie
> avant l'expiration duquel
> il doit s'aligner sur le coloriage instanciel (de sortie)
> pourvu que ce dernier soit, entretemps, resté constant.

Un sommet fonctionnel (branché)
est (en état) <u>stable</u>
si et seulement si
ses coloriages de sortie instanciel et instantané sont égaux.

Un sommet fonctionnel en état stable $y(t) = F(x(t))$
reste en état stable de même sortie (instantanée = instancielle!)
tant que son coloriage instanciel garde la même valeur,
c'est-à-dire tant que son coloriage d'entrée
reste cantonné dans le même ensemble de niveau
de la fonction habitant ce sommet.

L'axiome d'évolution ne dit pas au coloriage instantané de sortie
par quelle voie accéder à la stabilité,
en alignant son coloriage instantané de sortie
sur le coloriage instanciel (de sortie).
Il lui impose seulement de le faire
avant l'expiration du délai imparti.
sans lui interdire de batifoler entretemps.

Ce <u>délai</u> peut être fonction du sommet particulier qu'il habite,
du type de ce sommet,
du coloriage instanciel de sortie,
voire du coloriage de sortie
du dernier état stable atteint sous le branchement en cours ...

Mais le présent exposé laisse dans l'ombre la valeur des délais
et leur dépendance de divers facteurs.

On dit indifféremment qu'un graphe fonctionnel et son coloriage

sont stables ou en état stable

lorsque tous les sommets du graphe se trouvent en état stable.

Et coloriage sensoriel (d'un graphe informatif) signifie évidemment coloriage de l'ensemble de ses flèches sensorielles,

Il résulte du Théorème 4, qu'en graphe fonctionnel sans cycle, dont le coloriage des flèches de poids <p se maintient constant le coloriage de l'ensemble de toutes les flèches de poids ≤p

évolue à son tour spontanément

vers un état, constant dans le temps, et fonction exclusive

du coloriage de départ des flèches de poids <p.

Dès lors, par induction évidente :

Théorème 5

Tout graphe fonctionnel sans cycle

à coloriage sensoriel constant

évolue spontanément vers un état stable

fonction exclusive du coloriage sensoriel de départ

Passant au quotient par le sous-graphe interne et disant sommet fonctionnel pour graphe fonctionnel à un seul sommet

suit

Corollaire

Tout graphe fonctionnel sans cycle est sommet fonctionnel

dont les entrées sont ses sensorielles

et les sorties sont ses commandes

L'ordinateur est un graphe boolien:

Les graphes booliens sont les graphes fonctionnels à palette $\{$bleu rouge$\}$, identifiée par

bleu = O   rouge = I

au champ de vérité

$$\{I \ O\} + \bullet$$

où le produit de vérité est nul
si et seulement si   l'un au moins des facteurs est nul

et la somme de vérité est nulle ou une
selon que le nombre des termes uns est pair ou impair.

Les sommets booliens
sont les sommets des graphes booliens.

Les sommets de vérité sont les sommets booliens dont les sorties sont toujours toutes rouges ou toutes bleues, cette couleur de sortie pouvant évidemment varier avec le temps. Les fonctions de vérité sont les fonctions qui actionnent les sommets de vérité.

Nous adoptons ci-dessous la commode convention de von Neumann qui identifie chaque naturel à l'ensemble des naturels strictement plus petits que lui:

$$5 = \{4\ 3\ 2\ 1\ 0\}$$
$$2 = \{1\ 0\}$$
$$1 = \{0\}$$
$$0 = \{\ \} = \emptyset = \underline{\text{ensemble vide}}$$

D'où, en binaire

$$\mathrm{IOI} = \{\mathrm{IOO}\ \mathrm{II}\ \mathrm{IO}\ \mathrm{I}\ \mathrm{O}\}$$
$$\mathrm{IO} = \{\mathrm{I}\ \mathrm{O}\}$$
$$\mathrm{I} = \{\mathrm{O}\}$$
$$\mathrm{O} = \{\ \}$$

$$\mathrm{IO} = \{\mathrm{I}\ \mathrm{O}\} = \mathrm{IO}^{\mathrm{I}}$$
$$\mathrm{IOO} = \{\mathrm{II}\ \mathrm{IO}\ \mathrm{OI}\ \mathrm{OO}\} = \mathrm{IO}^{\mathrm{IO}}$$
$$\mathrm{IOOO} = \{\mathrm{III}\ \mathrm{IIO}\ \mathrm{IOI}\ \mathrm{IOO}\ \mathrm{OII}\ \mathrm{OIO}\ \mathrm{OOI}\ \mathrm{OOO}\} = \mathrm{IO}^{\mathrm{II}}$$
$$\mathrm{I\ OOOO} = \{\mathrm{IIII}\ \mathrm{IIIO}\ \mathrm{IIOI}\ \mathrm{IIOO}\ \mathrm{IOII}\ \mathrm{IOIO}\ \mathrm{IOOI}\ \mathrm{IOOO}$$
$$\mathrm{OIII}\ \mathrm{OIIO}\ \mathrm{OIOI}\ \mathrm{OIOO}\ \mathrm{OOII}\ \mathrm{OOIO}\ \mathrm{OOOI}\ \mathrm{OOOO}\}$$
$$= \mathrm{IO}^{\mathrm{IOO}}$$

Le champ de vérité se récrit donc

$$\mathrm{IO} + \bullet$$

ens. des mots binaire de longueur m

Selon la convention de von Neumann, et par <u>bleu</u> = O <u>rouge</u> = I , la puissance IO^{m} est l'ensemble des coloriages d'entrée de tout sommet boolien à m entrées; et les coloriages de sortie des sommets booliens à

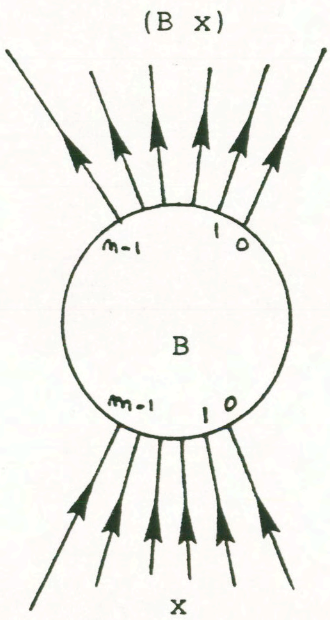
n sorties sont des éléments de IO^n.

- Ainsi tout <u>sommet boolien</u> à $\underline{m}$ entrées et $\underline{n}$ sorties est le siège d'une <u>fonction boolienne</u>

$$B : IO^m \longrightarrow IO^n$$

ce qui, avec des conventions évidentes, se dessine

<u>après délai!</u>



mot binaire de longueur n

mot binaire de longueur m

- Les <u>sommets de vérité</u> sont sièges d'une <u>fonction de vérité</u> $IO^m \longrightarrow IO$ donnant la couleur de sortie. (toutes les flèches de sortie sont d'une même couleur)

La fonction $\quad B : IO^m \longrightarrow IO^n$

peut encore être regardée comme suite $B_{n-1} \ldots B_o$

de n <u>fonctions de vérité</u> $B_i : IO^m \longrightarrow IO$

avec $\quad B : IO^m \longrightarrow IO^n : x \longmapsto B_{n-1}(x) \ldots B_o(x)$

Un tel sommet se dit brièvement <u>un</u> B.

Toute fonction de vérité $V : Io^n \dashrightarrow Io$

est entièrement définie par le partage de son domaine

en son <u>noyau</u> <u>ker</u> V,

ensemble de ses <u>zéros</u>,

ou points du domaine en lesquels elle est nulle,

et son <u>support</u> <u>spp</u> V,

ensemble de ses <u>uns</u>,

ou points du domaine en lesquels elle est <u>une</u> .

ens. des mots binaires de longueur n

Les 2^n premiers naturels, ou éléments du domaine Io^n de V

étant placés dans l'ordre décroissant

$$\underset{\underbrace{11\ldots1}_{n}}{2^n - 1} \qquad \underset{\underbrace{11\ldots1}_{n-1}0}{2^n - 2} \qquad \ldots \qquad 2 \qquad 1 \qquad \underset{\underbrace{00\ldots0}_{n}}{0}$$

le partage du domaine en support et noyau se visualise

(pour fixer les idées) IIoo oIoI ("la table de vérité" à 3 entrées)

en mettant des o et des I aux places respectives occupées

par les <u>zéros</u> et les <u>uns</u> de la fonction de vérité V.

Le naturel binaire intrinsèque ainsi obtenu

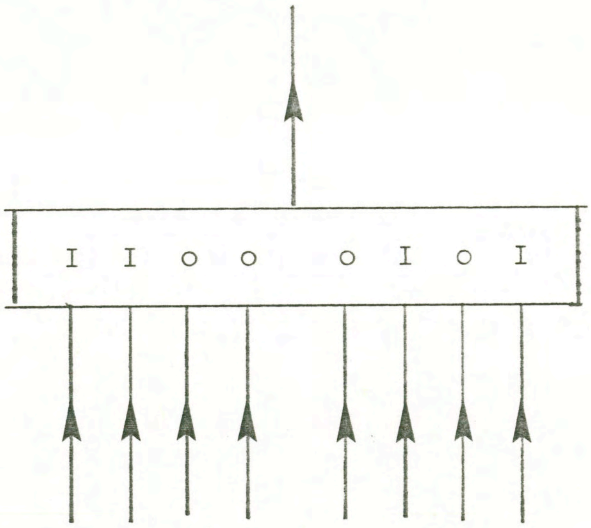
est le <u>code</u> (<u>binaire</u>)

de cette fonction de vérité

et il la définit entièrement.

Fixant les idées, nous appellerons <u>broche</u> IIoo oIoI

le sommet de vérité



dont les zéros de la fonction de vérité sont les naturels binaires

ooab codo sans bit I commun avec IIoo oIoI

Autrement dit,

la fonction de vérité de la broche IIoo oIoI

est <u>une</u>

si et seulement si

dans le schéma ci-dessus,

l'une au moins des flèches rouge de l'entrée

fait face à un I .

Toute broche permet à un monodactylographe installé à son clavier

de déchiffrer la fonction <u>F</u> dont elle porte le code :

rougissant la flèche d'entrée numérotée <u>m</u>

et laissant toutes les autres bleues,

après sempiternel délai,

la sortie arborera la valeur F(m).